TAMSAYILI PROGRAMLAMA PROBLEMLERİNİN MODELLENMESİ

Tamsayılı doğrusal programlama, değişkenlerden bazılarının veya tümünün tamsayılı(veya kesikli) değerler aldığı bir doğrusal programlama problemidir.

Tamsayılı programlama problemleri, gerçek dünya problemlerinde karşılaşılan birçok durumun kolayca ifade edilebilmesini sağlar ve uygulama alanlarına göre değişik isimler almaktadır.

a) Sırt Çantası Problemleri

Elimizde n tane madde olduğunu ve sınırlı hacme sahip bir sırt çantasını bu maddelerin bir alt kümesi ile doldurmaya çalıştığımızı düşünelim.

Sırt çantasına sahip olan kişinin amacı, mümkün olduğu kadar kendisine en fazla faydayı(katkıyı) sağlayacak maddeler alt kümesi ile çantasını doldurmak olacaktır.

$j = 1,2,\dots,n$ adet maddenin parçalara ayrılamayacağı varsayımı altında,

x_j : sırt çantasına konulacak j türündeki madde

c_j : j. maddenin sağladığı fayda

b_j : j. maddenin sırt çantasında kapladığı yer

b : sırt çantasının toplam hacmi

olmak üzere **Sırt Çantası Problemi modeli** aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$Max\ Z:\ \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$Kısıtlar$:

$$\sum_{j=1}^{n} b_j x_j \leq b$$

$$x_j \geq 0\ \ ve\ tamsayı,\ \ j = 1,2,\dots,n$$

Bu modele göre, sırt çantasında aynı maddeden birden fazla sayıda bulunabilir.

Sırt çantasında, aynı maddeden yalnızca 1 tane olması yada hiç olmaması istenebilir. Bu durumda karar değişkenlerini,

$$x_j : \begin{cases} 1 \;, & j.madde\ sırt\ çantasına\ konulursa \\ 0 \;, & j.madde\ sırt\ çantasına\ konulmazsa \end{cases}$$

biçiminde tanımladıktan sonra model;

$Max\ Z :\ \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

$Kısıtlar$:

$\sum_{j=1}^{n} b_j x_j \leq b$

$x_j = 0\ veya\ 1 \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, n$

olur. Burada tek kısıtlayıcı vardır. Kısıtlayıcı sayısı birden fazlada olabilir. Yani sırt çantasının hacmi yanında, taşıyabileceği ağırlık da söz konusu olabilir.

Sırt çantası modeli genel bir model olup, sadece sırt çantasına ait değildir. Benzer yapıdaki diğer güncel hayat problemleri de bu şekilde modellenebilir.

Örnek: Yurtdışında yaşayan bir kişi ülkesine dönerken yanında getirdiği elektronik eşyaları kendi ülkesinde satıp kar etmeyi amaçlamaktadır. Her bir elektronik eşyanın net karı ve ağırlığı aşağıdaki tabloda verilmiştir. Gümrükte, kişinin toplamda en fazla 25 kg eşya getirmesine izin verilmektedir.

Elektronik eşya no	Net kar (pb)	Ağırlık (kg)
1	35	2
2	85	3
3	135	9
4	10	0.5
5	25	2
6	2	0.1
7	94	4

Net karı enbüyükleyecek elektronik eşya kombinasyonunu bulmak için bir model kurunuz.(Bakır, M.A., Altunkatnak, B., 2003, s 161).

Çözüm:

Karar değişkenleri aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

x_j : Getirilecek j türündeki elektronik eşya, $j = 1,2, \dots ,7$

Amaç, net karı maksimum yapmak olduğundan model,

$$Max. Z:\ 35x_1 + 85x_2 + 135x_3 + 10x_4 + 25x_5 + 2x_6 + 94x_7$$

$Kısıtlar$:

$$2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + (0.5)x_4 + 2x_5 + (0.1)x_6 + 4x_7 \leq 25$$

$$x_1 , x_2 , x_3, x_4, x_5 , x_6 , x_7 \geq 0$$

olur.

Örnek:

Bir işletme ürettiği yeni ürünün tanıtımı için değişik reklam kampanyaları düşünmektedir. İşletme bu iş için 200 milyar TL'lik bir bütçe ayırmıştır ve şirketin önünde değişik reklam alternatifleri bulunmaktadır. Şirket reklam kampanyası için metin yazarı, oyuncu ve editörlerin her birini en fazla 500 saat çalıştırabilir. Aşağıdaki tabloda ise her bir reklam kampanyasının maliyeti, reklamın ulaşabileceği potansiyel müşteri sayısı, metin yazarı, oyuncu ve editörlerin ilgili reklam için harcadıkları zaman verilmiştir.

Reklam No	Reklam Türü	Maliyet (Milyar TL)	Ulaşılabilecek potansiyel müşteri sayısı (bin)	Metin yazarı için gerekli zaman (Saat)	Oyuncu için gerekli zaman (Saat)	Editör için gerekli zaman (Saat)
1 (x_1)	TV	140	500	300	300	200
2 (x_2)	Gazete	50	100	150	-	150
3 (x_3)	İnternet	25	600	100	-	-
4 (x_4)	Dergi	10	20	150	150	250
5 (x_5)	Broşür	20	15	50	-	-
6 (x_6)	İlan Panosu	40	40	25	125	-

Ulaşılabilecek potansiyel insan sayısını maksimum yapacak olan modeli kurunuz. (Bakır, M.A., Altunkatnak, B., 2003, s170).

Karar değişkenleri aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$x_j : \begin{cases} 1\ ,\ j.reklam\ \text{türü}\ seçilirse \\ 0\ ,\ j.reklam\ \text{türü}\ seçilmezse \end{cases} \quad , \quad j = 1,2,\ldots,6$$

Model ise:

$$Max.Z : 500x_1 + 100x_2 + 600x_3 + 20x_4 + 15x_5 + 40x_6$$

Kısıtlar:

$$140x_1 + 50x_2 + 25x_3 + 10x_4 + 20x_5 + 40x_6 \leq 200$$

$$300x_1 + 150x_2 + 100x_3 + 150x_4 + 50x_5 + 25x_6 \leq 500$$

$$300x_1 + 0x_2 + x_3 + 150x_4 + 0x_5 + 125x_6 \leq 500$$

$$200x_1 + 150x_2 + 0x_3 + 250x_4 + 0x_5 + 0x_6 \leq 500$$

$$x_j = 0\ veya\ 1 \quad , \quad j = 1,2,\ldots,6$$

biçiminde olur.

b) Sermaye bütçeleme modelleri

Sırt çantası problemi türündendir. Uygulamada çok sık kullanıldığı için sermaye bütçeleme problemi olarak adlandırılır.

Sermaye bütçeleme problemleri; en büyük getiriyi verecek proje, yatırım vb.lerin optimal bir koleksiyonunu bütçe yada kaynak kısıtları altında veren modellerdir.

Örnek. (Bakır, M.A., Altunkatnak, B., 2003, s175)

Bir yatırımcının elinde 100 milyar TL olsun. Birbirinden bağımsız 5 tane yatırım alternatifine ilişkin maliyet ve getiri bilgileri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

$\boldsymbol{j.yatırım}$	$\boldsymbol{Gerekli\ maliyet(milyar\ TL)}$	$\boldsymbol{Yıllık\ getiri(milyar\ TL)}$
1	15	32
2	35	45
3	25	40
4	30	50
5	20	25

Yatırımcı yıllık toplam getirini en büyük yapmak için hangi yatırım kararlarını vermelidir?

Karar değişkenleri aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$x_j : \begin{cases} 1 \ , \ j.yatırım\ seçilirse \\ 0 \ , \ j.yatırım\ seçilmezse \end{cases} \quad , \quad j = 1,2,\dots,5$$

Yıllık toplam getiriyi en büyük yapacak olan model,

$$Max\ \ Z{:}\ 32x_1 + 45x_2 + 40x_3 + 50x_4 + 25x_5$$

$Kısıtlar$:

$$15x_1 + 35x_2 + 25x_3 + 30x_4 + 20x_5 \leq\ 100$$

$$x_1\,, x_2\,, x_3, x_4, x_5 =\ 0\ veya\ 1$$

Örnek. (Bakır, M.A., Altunkatnak, B., 2003, s177)

Bir yatırımcı elindeki tasarruflarını, takip eden 3 yıl için mevcut 8 projeye yatırmak ve böylece yatırımlarını 4'üncü yılda sattığında beklenen satış fiyatını maksimum yapmak istemektedir. Herhangi bir projeye karar verildiğinde 3 yıl için çeşitli miktarlarda para yatırmalıdır. Yatırımcının her bir dönem itibariyle yatırabileceği para sınırlıdır. Probleme ilişkin veriler aşağıdaki tablodadır.

Yatırımcının amacını gerçekleştirebilmesi için yapacağı yatırım planlaması nasıl olmalıdır?

Proje	**Yatırılması gereken miktar (10000 euro)**			**4.yılda beklenen satış fiyatı (10000 dolar)**
	Yıl 1	**Yıl 2**	**Yıl 3**	
1	20	30	10	70
2	40	20	0	75
3	50	30	10	110
4	25	25	35	105
5	15	25	30	85
6	7	22	23	65
7	23	23	23	82
8	13	28	15	70
Bütçe	95	70	65	

$$x_j : \begin{cases} 1 & , \ j.proje\ seçilirse \\ 0 & , \ aksi\ durumda \end{cases} \quad , \quad j = 1,2,\dots,8$$

$$Max\ Z: 70x_1 + 75x_2 + 110x_3 + 105x_4 + 85x_5 + 65x_6 + 82x_7 + 70x_8$$

$Kısıtlar$:

$$20x_1 + 40x_2 + 50x_3 + 25x_4 + 15x_5 + 7x_6 + 23x_7 + 13x_8 \leq 95$$

$$30x_1 + 20x_2 + 30x_3 + 25x_4 + 25x_5 + 22x_6 + 23x_7 + 28x_8 \leq 70$$

$$00x_1 + 0x_2 + 10x_3 + 35x_4 + 30x_5 + 23x_6 + 23x_7 + 15x_8 \leq 65$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 = 0\ veya\ 1$$

Çözüm sonuçları:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0,\ x_4 = 1,\ x_5 = 1,\ x_6 = 0,\ x_7 = 0,\ x_8 = 0 \ ,\ Z = 265$$

Örnek. (Bakır, M.A., Altunkatnak, B., 2003, s182)

Bir işletnme bütçe sınırlamasından dolayı aşağıda verilen 5 proje arasından seçim yapmak zorundadır. Ancak 1 nolu proje ile 5 nolu proje aynı anda seçilemez. Şirketin 150 pb bütçesi olduğu düşünülürse nasıl bir seçim yapılmalıdır ki toplam getiri en büyük olsun?

Proje no	Maliyet	Getiri
1	30	8
2	45	9
3	60	10
4	40	7
5	20	8

$$x_j : \begin{cases} 1 \ , \ j.proje \ seçilirse \\ 0 \ , \ diğer \ durumlarda \end{cases} \quad , \quad j = 1,2, \dots, 5$$

$$Max \ Z: \ 8x_1 + 9x_2 + 10x_3 + 7x_4 + 8x_5$$

$Kısıtlar$:

$$30x_1 + 45x_2 + 60x_3 + 40x_4 + 20x_5 \leq \ 150$$

$$x_1 + x_5 \leq \ 1$$

$$x_1 \ , x_2 \ , x_3, x_4, x_5 = \ 0 \ veya \ 1$$

c) Atama ve Eşleştirme Modelleri

Atama problemleri, iki ayrı türdeki nesnelerin optimal eşleştirilmesiyle ilgilidir. Örneğin, makinelere atanacak işler, müşterilere atanacak satış personeli gibi.

Karar değişkenleri,

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & , \quad \text{I. kümenin i. elemanı II. kümenin j. elemanı ile eşleşirse} \\ 0 & , \quad \text{aksi durumda} \end{cases}$$

olarak tanımlandığında model aşağıdaki biçimde kurulur:

$$Min\ Z(veya\ Max\ Z):\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$Kısıtlar$:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad , \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} = 0 \text{ veya } 1 \quad ; \quad \text{tüm i ve j'ler için}$$

Örnek. Küçük bir tekstil atölyesinde pantolon ve ceket imal edilmektedir. Burada kumaşlara ölçme, çizme, kesme, dikme, boyama ve ütüleme işlemleri uygulanmaktadır. Atölyede 6 işçi çalışmaktadır. İşçilerin hangi işi ne kadar sürede(dk) yapabileceği aşağıdaki tabloda verilmiştir. Toplam üretim zamanını en küçük yapacak iş akış planlaması modelini kurunuz.

İşçi / İş	1	2	3	4	5	6
Ölçme	35	5	28	13	25	-
Çizme	15	25	23	-	-	--
Kesme	20	25	-	25	15	-
Dikme	35	-	-	-	-	6
Boyama	-	-	15	-	19	10
Ütüleme	-	-	-	20	-	18

Çözüm.

İşçi (j) / İş (i)	1	2	3	4	5	6
Ölçme (1)	35	5	28	13	25	-
Çizme (2)	15	25	23	-	-	--
Kesme (3)	20	25	-	25	15	-
Dikme (4)	35	-	-	-	-	6
Boyama (5)	-	-	15	-	19	10
Ütüleme (6)	-	-	-	20	-	18

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \quad , & \text{i. işi j. işçisine verilirse(atanırsa)} \\ 0 \quad , & \text{aksi durumda} \end{cases} \qquad i, j = 1, 2, \dots, 6$$

$$\begin{aligned} \text{Min Z :} \quad & 35x_{11} + 5x_{12} + 28x_{13} + 13x_{14} + 25x_{15} + 0x_{16} + \\ & 15x_{21} + 25x_{22} + 23x_{23} + 0x_{24} + 0x_{25} + 0x_{26} + \\ & 20x_{31} + 25x_{32} + 0x_{33} + 25x_{34} + 15x_{35} + 0x_{36} + \\ & 35x_{41} + 0x_{42} + 0x_{43} + 0x_{44} + 0x_{45} + 6x_{46} + \\ & 0x_{51} + 0x_{52} + 15x_{53} + 0x_{54} + 19x_{55} + 10x_{56} + \\ & 0x_{61} + 0x_{62} + 0x_{63} + 20x_{64} + 0x_{65} + 18x_{66} \end{aligned}$$

Kısıtlar:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + 0x_{16} = 1$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + 0x_{24} + 0x_{25} + 0x_{26} = 1$$

$$x_{31} + x_{32} + 0x_{33} + x_{34} + x_{35} + 0x_{36} = 1$$

$$x_{41} + 0x_{42} + 0x_{43} + 0x_{44} + 0x_{45} + x_{46} = 1$$

$$0x_{51} + 0x_{52} + x_{53} + 0x_{54} + x_{55} + x_{56} = 1$$

$$0\,x_{61} + 0x_{62} + 0x_{63} + x_{64} + 0x_{65} + x_{66} = 1$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + 0x_{51} + 0x_{61} = 1$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + 0x_{42} + 0x_{52} + 0x_{62} = 1$$

$$x_{13} + x_{23} + 0x_{33} + 0x_{43} + x_{53} + 0x_{63} = 1$$

$$x_{14} + 0x_{24} + x_{34} + 0x_{44} + 0x_{54} + x_{64} = 1$$

$$x_{15} + 0x_{25} + x_{35} + 0x_{45} + x_{55} + 0x_{65} = 1$$

$$0\,x_{16} + 0x_{26} + 0x_{36} + x_{46} + x_{56} + x_{66} = 1$$

$$x_{ij} = 0 \text{ veya } 1 \quad ; \quad \text{tüm i ve j'ler için}$$

d) Gezgin Satıcı Problemi

Gezgin satıcı problemleri(GSP), belli bir kümedeki her bir noktayı sadece bir defa ziyaret etmek için en küçük toplam uzaklığı verecek güzergâhı araştıran problemlerdir.

Bu tür problemlerde bir satıcı Şehir 1'den başlamak üzere 2, 3, …, n şehrin her birini belli bir sırada sadece bir kez ziyaret etmeli ve sonunda yine başlangıç şehrine dönmelidir. Amaç, en küçük maliyeti verecek şekilde ziyaret sırasını tespit etmektir.

Gezgin satıcı problemleri simetrik ve asimetrik modeller diye ikiye ayrılır. Eğer uzaklıklar yada bir i noktasından j noktasına geçişin maliyeti, j noktasından i noktasına geçişin maliyeti ile aynı ise GSP simetrik, aksi durumda asimetriktir.

Simetrik GSP için karar değişkenleri,

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & , \ eğer \ \ i \ ve \ j \ arasında \ güzergah \ belirlenmişse \qquad (\, i < j \,) \\ 0 & , \qquad\qquad aksi \ durumda \end{cases}$$

olarak tanımlanır ve model aşağıdaki gibi kurulur:

$$Min\ Z: \ \sum_{i} \sum_{j>i} d_{ij} x_{ij}$$

$$Kısıtlar:$$

$$\sum_{j<i} x_{ji} + \sum_{j>i} x_{ij} = 2$$

$$x_{ij} = 0 \ veya \ 1 \quad ; \quad tüm \ i \ ve \ j'ler \ için$$

Burada

$$d_{ij}: i \ noktası \ ile \ j \ noktası \ arasındaki \ uzaklık \ yada \ geçiş \ maliteti$$

anlamındadır.

Simetrik problem için uygun çözümde herhangi bir i noktasına ilişkin iki tane x değişkeni 1 değerini alabilir. Bu bağlantılardan birisi i-nin güzergâhtaki önceki şehirle, diğeri ise i-nin sonraki şehirle bağlantısını kurar. Bunun için kısıtlar = 2 alınır.

Örnek. Bir seyahat şirketi 7 Avrupa ülkesini kapsayacak tur düzenlemeyi planlamaktadır. Bu ülkeler arasındaki uçuş mesafeleri aşağıdaki tabloda verilmiştir. Uçak bileti fiyatlarının uçuş mesafesiyle doğru orantılı olarak arttığı düşünülürse, seyahat şirketi bu ülkelere seyahat sırasını nasıl belirlemelidir ki ulaşım maliyetini en küçükleyebilsin?

j i	1-Londra	2-Paris	3-Roma	4-Madrid	5-İstanbul	6-Bükreş	7-Lizbon
1-Londra	-	430	1920	1690	3160	2590	2240
2-Paris	430	-	1500	1260	2830	2470	1810
3-Roma	1920	1500	-	2040	2400	2030	2720
4-Madrid	1690	1260	2040	-	3810	3300	650
5-İstanbul	3160	2830	2400	3810	-	700	4460
6-Bükreş	2590	2470	2030	3300	700	-	3950
7-Lizbon	2240	1810	2720	650	4460	3950	-

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & , \ eğer\ \ i\ \ şehrinden\ j\ şehrine\ güzergah\ belirlenmişse \qquad (\ i < j\ ) \\ 0 & , \qquad\qquad aksi\ durumda \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Min Z}: \ & 430x_{12} + 1920x_{13} + 1690x_{14} + 3160x_{15} + 2590x_{16} + 2240x_{17} + \\ & 1500x_{23} + 1260x_{24} + 2830x_{25} + 2470x_{26} + 1810x_{27} + \\ & 2040x_{34} + 2400x_{35} + 2030x_{36} + 27200x_{37} + \\ & 3810x_{45} + 3300x_{46} + 650x_{47} + \\ & 700x_{56} + 4460x_{57} + \\ & 3950x_{67} \end{aligned}$$

Kısıtlar:

$$x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} = 2 \quad (\ Londra\ )$$

$$x_{12} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{27} = 2 \quad (\ Paris\ )$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{34} + x_{35} + x_{36} + x_{37} = 2 \quad (\ Roma\ )$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{45} + x_{46} + x_{47} = 2 \quad (\ \text{Madrid}\ )$$

$$x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{56} + x_{57} = 2 \quad (\ \text{İstanbul}\ )$$

$$x_{16} + x_{26} + x_{36} + x_{46} + x_{56} + x_{67} = 2 \quad (\ \text{Bükreş}\ )$$

$$x_{17} + x_{27} + x_{37} + x_{47} + x_{57} + x_{67} = 2 \quad (\ Lizbon\ )$$

$$x_{ij} = 0\ veya\ 1 \quad ; \quad i, j = 1,2, \ldots, 7$$

Asimetrik GSP’de uzaklıklar farklıdır ve formülasyonda değişiklikler söz konusudur.